

Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение
высшего образования
**«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»**
(Финансовый университет)

**Кафедра моделирования и системного анализа
Факультет информационных технологий и анализа больших данных**

Документ подписан усиленной неквалифицированной электронной подписью
Организация: Финансовый университет при Правительстве РФ
Утверждено: Проректор по учебной и методической работе Е.А. Каменева
Сертификат: sm0NUmjlfYUoVPBArHsmJoOfxGrPeVJU
Дата: 27.10.2025 г.

Т.В. Золотова

Методы оптимизации

Рабочая программа дисциплины

для студентов, обучающихся по направлению подготовки:

01.03.02 - Прикладная математика и информатика,

Образовательная программа «Прикладное машинное обучение»

Профиль:

«Прикладное машинное обучение»

Рекомендовано

*Факультет информационных технологий и анализа больших данных
(протокол № 03 от 16.12.2025 г.)*

Одобрено

*Кафедра моделирования и системного анализа
(протокол № 5 от 09.12.2025 г.)*

СОДЕРЖАНИЕ

1.	Наименование дисциплины	3
2.	Перечень планируемых результатов освоения образовательной программы (перечень компетенций) с указанием индикаторов их достижения и планируемых результатов обучения по дисциплине	3
3.	Место дисциплины в структуре образовательной программы	4
4.	Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах и в академических часах с выделением объема аудиторной (лекции, семинары) и самостоятельной работы обучающихся	4
5.	Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) дисциплины с указанием их объемов (в академических часах) и видов учебных занятий	5
5.1.	Содержание дисциплины	5
5.2.	Учебно-тематический план	7
5.3.	Содержание семинаров	8
6.	Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине	10
6.1.	Перечень вопросов, отводимых на самостоятельное освоение дисциплины, формы внеаудиторной самостоятельной работы	10
6.2.	Перечень вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю	13
7.	Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине	14
8.	Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины	22
9.	Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины	22
10.	Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины	24
11.	Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем	24
12.	Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине	25

1. Наименование дисциплины

«Методы оптимизации».

2. Перечень планируемых результатов освоения образовательной программы (перечень компетенций) с указанием индикаторов их достижения и планируемых результатов обучения по дисциплине

Код компетенции	Наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции	Результаты обучения (умения и знания), соотнесенные с индикаторами достижения компетенции
ПКП-4	Способность выбирать модели машинного обучения, решать прикладные задачи машинного обучения, оценивать качество решений и интерпретировать их результаты	1. Выбирает модели машинного обучения в зависимости от специфики решаемой прикладной задачи, доступных данных и полученных метрик качества	знать: прикладные методы оптимизации уметь: формировать математические модели и подбирать методы из решения
		2. Применяет основные классы моделей машинного обучения с использованием актуальных инструментальных средств	знать: современные пакеты прикладных программ и языки программирования уметь: решать с использованием программного обеспечения прикладные задачи и проводить анализ результатов
		3. Определяет различные метрики качества модели и их интерпретации, в том числе выявления ситуации переобучения модели	знать: методы тестирования и анализа полученных результатов уметь: анализировать результаты вычислений в плане адекватности модели и корректировать ее при необходимости

3. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Методы оптимизации» относится к «Профилю "Прикладное машинное обучение"».

4. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах и в академических часах с выделением объема аудиторной (лекции, семинары) и самостоятельной работы обучающихся

Очная форма обучения

Вид учебной работы по дисциплине	Всего (в з/е и часах)	Семестр 5 (в часах)
Общая трудоёмкость дисциплины	5/180	180
Контактная работа- Аудиторные занятия	68	68
Лекции	16	16
Семинары, практические занятия	52	52
Самостоятельная работа	112	112
Вид текущего контроля	Контрольная работа	Контрольная работа
Вид промежуточной аттестации	Экзамен	Экзамен

5. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) дисциплины с указанием их объемов (в академических часах) и видов учебных занятий

5.1. Содержание дисциплины

Тема 1. Введение в методы оптимизации

Общая постановка задачи оптимизации. Классификация задач. Безусловный экстремум функций многих переменных (ФМП). Необходимые и достаточные условия существования локального экстремума ФМП. Глобальный экстремум, теорема Вейерштрасса. Численные методы определения локального безусловного экстремума ФМП. Градиентный метод с постоянным шагом. Метод наискорейшего спуска. Метод покоординатного спуска. Метод сопряженных градиентов. Метод Ньютона. Условия экстремума в задачах с ограничениями типа равенств. Метод Лагранжа.

Тема 2. Нелинейное программирование

Постановка задачи математического программирования. Условия регулярности. Необходимые условия оптимальности: условия Куна-Таккера. Постановка задачи выпуклого программирования. Понятие седловой точки. Связь задачи выпуклого программирования с задачей нахождения седловой точки функции Лагранжа: теорема Куна-Таккера. Задача квадратичного программирования. Экономическая интерпретация множителей Лагранжа. Зависимость решения от параметров. Численные методы решения задач нелинейного программирования. Метод штрафных функций. Метод проекции градиента. Метод условного градиента. Метод Франка-Вульфа для решения задач с линейными ограничениями. Приближенный метод нахождения седловой точки функции Лагранжа.

Тема 3. Линейное программирование

Постановка задачи линейного программирования (ЛП). Каноническая и стандартная форма задачи ЛП. Графический метод решения задач ЛП. Симплекс-метод. Метод искусственного базиса. Двойственная задача ЛП. Теоремы двойственности. Двойственность в экономических задачах. Двойственные цены.

Тема 4. Транспортная задача

Постановка транспортной задачи. Методы определения начального опорного плана: метод северо-западного угла, метод наименьшего тарифа, метод Фогеля. Метод потенциалов. Транспортная задача с дополнительными ограничениями.

Тема 5. Целочисленное программирование

Постановка задачи целочисленного программирования. Примеры: задача о назначении, задача о ранце, задача коммивояжера. Метод ветвей и границ. Двойственный симплекс-метод. Псевдорешение. Метод Гомори. Примеры задач с экономическим содержанием. Задача о назначении. Венгерский метод.

Тема 6. Динамическое программирование

Метод динамического программирования. Принцип оптимальности и уравнение Беллмана. Задача о распределении средств между предприятиями (непрерывный и дискретный случай). Модели управления запасами. Статическая детерминированная модель без дефицита и с дефицитом. Стохастические модели управления запасами. Задача о замене оборудования.

Тема 7. Многокритериальная оптимизация

Постановка задачи многокритериальной оптимизации. Множество достижимых критериальных векторов. Оптимальность по Парето и по Слейтеру. Множество эффективных решений. Методы решения задач многокритериальной оптимизации: метод сверки критериев, метод идеальной точки, метод приоритетов, метод последовательных уступок, метод ограничений. Целевое программирование. Метод анализа иерархий.

Тема 8. Теоретико-игровые принципы оптимальности

Основные понятия теории игр. Антагонистические игры, матричные игры. Матрица выигрышей, чистые и смешанные стратегии, верхняя и нижняя цена игры, седловая точка. Теорема фон Неймана. Принцип доминирования в матричной игре. Решение матричных игр в смешанных стратегиях. Связь матричной игры с задачей ЛП. Принципы оптимальности в играх с природой. Биматричные игры. Равновесие по Нэшу.

5.2. Учебно-тематический план

№ п/п	Наименование тем(разделов) дисциплины	Трудоемкость в часах				
		Всего	Контактная работа - Аудиторная работа			Самостоя тельная работа
			Общая, в т.ч.:	Лекции	Семинары, практическ ие занятия	
1	Введение в методы оптимизации	16	4	2	2	12
2	Нелинейное программирование	28	12	2	10	16
3	Линейное программирование	26	10	2	8	16
4	Транспортная задача	22	8	2	6	14
5	Целочисленное программирование	20	6	2	4	14
6	Динамическое программирование	24	10	2	8	14
7	Многокритериальная оптимизация	26	12	4	8	14
8	Теоретико-игровые принципы оптимальности	18	6	0	6	12
	Итого	180	68	16	52	112

5.3. Содержание семинаров

Наименование тем (разделов) дисциплины	Перечень вопросов для обсуждения на семинарах, практических занятиях	Формы проведения занятий
Введение в методы оптимизации	Безусловный экстремум ФМП. Необходимые и достаточные условия существования локального экстремума. Глобальный экстремум. Численные методы определения локального экстремума ФМП. Градиентный метод с постоянным шагом. Метод наискорейшего спуска. Метод Ньютона. Метод Лагранжа.	Опрос. Проверка самостоятельной работы. Решение задач в интерактивной форме.
Нелинейное программирование	Постановка задачи математического программирования. Условия регулярности. Условия Куна-Таккера. Постановка задачи выпуклого программирования. Понятие седловой точки. Теорема Куна-Таккера. Численные методы решения задач нелинейного программирования. Метод штрафных функций. Метод проекции градиента. Приближенный метод нахождения седловой точки функции Лагранжа.	Опрос. Проверка самостоятельной работы. Решение задач в интерактивной форме.
Линейное программирование	Постановка задачи ЛП. Три формы задачи ЛП. Графический метод решения задачи ЛП. Симплекс-метод. Метод искусственного базиса. Двойственная задача ЛП. Теоремы двойственности. Двойственность в экономических задачах. Двойственные цены.	Опрос. Проверка самостоятельной работы. Решение задач в интерактивной форме.
Транспортная задача	Методы определения начального опорного плана в транспортной задаче: метод северо-западного угла, метод наименьшего тарифа, метод Фогеля. Метод потенциалов. Транспортная задача с дополнительными ограничениями.	Опрос. Проверка самостоятельной работы. Решение задач в интерактивной форме.
Целочисленное программирование	Метод ветвей и границ. Псевдорешение. Алгоритм двойственного симплекс-метода. Метод Гомори решения задач целочисленного программирования. Венгерский метод.	Опрос. Проверка самостоятельной работы. Решение задач в интерактивной форме.
Динамическое программирование	Уравнение Беллмана. Решение задачи о распределении средств между предприятиями (непрерывный и дискретный случай). Решение задачи о замене оборудования.	Опрос. Проверка самостоятельной работы. Решение задач в интерактивной форме.
Многокритериальная оптимизация	Методы решения задач многокритериальной оптимизации: метод сверки критериев, метод идеальной точки, метод последовательных уступок, метод ограничений. Целевое	Опрос. Проверка самостоятельной работы. Решение задач в интерактивной

	программирование. Метод анализа иерархий.	форме.
Теоретико-игровые принципы оптимальности	Матрица выигрышей, чистые и смешанные стратегии, верхняя и нижняя цена игры, седловая точка. Теорема фон Неймана. Принцип доминирования в матричной игре. Решение матричных игр в смешанных стратегиях. Связь матричной игры с задачей ЛП. Принципы оптимальности в играх с природой. Биматричные игры. Равновесие по Нэшу.	Опрос. Проверка самостоятельной работы. Решение задач в интерактивной форме.

6. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

6.1. Перечень вопросов, отводимых на самостоятельное освоение дисциплины, формы внеаудиторной самостоятельной работы

Наименование тем (разделов) дисциплины	Перечень вопросов, отводимых на самостоятельное освоение	Формы внеаудиторной самостоятельной работы
Введение в методы оптимизации	Метод покоординатного спуска. Метод сопряженных градиентов.	Разбор вопросов по теме занятия; подготовка к семинарским и практическим занятиям; выполнение домашних заданий; изучение рекомендованных к занятию литературных источников.
Нелинейное программирование	Решение задачи об оптимальном портфеле ценных бумаг методом множителей Лагранжа. Метод Франка-Вульфа для решения задач с линейными ограничениями.	Разбор вопросов по теме занятия; подготовка к семинарским и практическим занятиям; выполнение домашних заданий; изучение рекомендованных к занятию литературных источников.
Линейное программирование	Геометрическая интерпретация симплекс-алгоритма. Двойственность в экономических задачах.	Разбор вопросов по теме занятия; подготовка к семинарским и практическим занятиям; выполнение домашних заданий; изучение рекомендованных к занятию литературных источников.
Транспортная задача	Открытая модель транспортной задачи.	Разбор вопросов по теме занятия; подготовка к

		семинарским и практическим занятиям; выполнение домашних заданий; изучение рекомендованных к занятию литературных источников.
Целочисленное программирование	Задачи с экономическим содержанием.	Разбор вопросов по теме занятия; подготовка к семинарским и практическим занятиям; выполнение домашних заданий; изучение рекомендованных к занятию литературных источников.
Динамическое программирование	Модели управления запасами. Статическая детерминированная модель без дефицита и с дефицитом. Стохастические модели управления запасами.	Разбор вопросов по теме занятия; подготовка к семинарским и практическим занятиям; выполнение домашних заданий; изучение рекомендованных к занятию литературных источников.
Многокритериальная оптимизация	Оптимальность по Слейтеру. Метод приоритетов в задачах многокритериальной оптимизации.	Разбор вопросов по теме занятия; подготовка к семинарским и практическим занятиям; выполнение домашних заданий; изучение рекомендованных к занятию литературных источников.
Теоретико-игровые принципы оптимальности	Игровые модели в экономике и финансах.	Разбор вопросов по теме занятия; подготовка к семинарским и практическим занятиям; выполнение домашних заданий;

		изучение рекомендованных к занятию литературных источников.
--	--	--

6.2. Перечень вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

1. Численные методы поиска локального экстремума ФМП первого порядка. Градиентный метод с постоянным шагом. Метод наискорейшего спуска.
2. Численные методы поиска локального экстремума ФМП второго порядка. Метод Ньютона.
3. Условия Куна-Таккера.
4. Метод штрафных функций, метод проекции градиента для решения задачи нелинейного программирования. Численный метод нахождения седловой точки функции Лагранжа.
5. Каноническая и стандартная формы задачи ЛП.
6. Графический метод решения задачи ЛП.
7. Симплекс-метод.
8. Двойственная задача ЛП. Теоремы двойственности.
9. Метод ветвей и границ.
10. Метод Гомори.

Дополнительная информация

Текущий контроль успеваемости осуществляется в ходе учебного процесса и консультирования студентов, по результатам выполнения ими самостоятельных работ. Основными формами текущего контроля знаний являются: выполнение контрольных заданий, описание сути и технологии решения задач; ответы на вопросы примерного Перечня вопросов для промежуточного тестирования.

7. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Перечень компетенций с указанием индикаторов их достижения в процессе освоения образовательной программы содержится в разделе 2. *Перечень планируемых результатов освоения образовательной программы (перечень компетенций) с указанием индикаторов их достижения и планируемых результатов обучения по дисциплине.*

Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки индикаторов достижения компетенций, умений и знаний

ПКП-4 Способность выбирать модели машинного обучения, решать прикладные задачи машинного обучения, оценивать качество решений и интерпретировать их результаты

1) 1. Выбирает модели машинного обучения в зависимости от специфики решаемой прикладной задачи, доступных данных и полученных метрик качества

Результаты обучения (умения и знания), соотнесенные с индикаторами достижения компетенции

Знать: прикладные методы оптимизации

Уметь: формировать математические модели и подбирать методы из решения

Типовые контрольные задания

Задание 1.

Для товаров x_1 и x_2 известны функции спроса: Фирма монополист имеет функцию издержек. Вычислите максимальную прибыль фирмы в этих условиях и найдите соответствующий производственный план.

$$q_1 = 54 - p_1, \quad q_2 = 35 - \frac{1}{2}p_2.$$

$$c = 2q_1^2 + 6q_1q_2 + 3q_2^2 + 4.$$

Задание 2.

Необходимо распределить средства в размере $s_0 = 12000$ в течение 3 лет между двумя предприятиями. Средства x , выделяемые первому предприятию, приносят в конце года доход $f_1(x) = 0,6x$ и возвращаются в размере $\varphi_1(x) = 0,5x$. Средства y , вложенные во второе предприятие, соответственно, приносят доход $f_2(y) = 0,4y$ и возвращаются в размере $\varphi_2(y) = 0,7y$. В первый год выделенные средства распределяются полностью, а в следующие годы полностью распределяются возвращенные средства за предыдущий год. Доход в производство

не поступает. Сколько средств нужно выделять каждому предприятию в начале года, чтобы суммарный доход был максимальный за все 3 года. В ответе укажите средства, выделяемые каждому предприятию в виде таблицы и значение максимального дохода.

2) 2. Применяет основные классы моделей машинного обучения с использованием актуальных инструментальных средств

Результаты обучения (умения и знания), соотнесенные с индикаторами достижения компетенции

Знать: современные пакеты прикладных программ и языки программирования

Уметь: решать с использованием программного обеспечения прикладные задачи и проводить анализ результатов

Типовые контрольные задания

Задание 1.

Найти в официальных источниках (например, сайт РБК) данные по доходности акций трех компаний, составить на основе этих данных вектор доходностей и ковариационную матрицу для построения оптимального портфеля.

Задание 2.

Известны ожидаемые доходности активов $\mu_1 = 25\%$, $\mu_2 = 20\%$ и ковариационная матрица. Методом множителей Лагранжа найти портфель минимального риска с доходностью не ниже 22%.

$$\begin{pmatrix} 1.21 & 0.1 \\ 0.1 & 0.64 \end{pmatrix}.$$

3) 3. Определяет различные метрики качества модели и их интерпретации, в том числе выявления ситуации переобучения модели

Результаты обучения (умения и знания), соотнесенные с индикаторами достижения компетенции

Знать: методы тестирования и анализа полученных результатов

Уметь: анализировать результаты вычислений в плане адекватности модели и корректировать ее при необходимости

Типовые контрольные задания

Задание 1.

Стоимость перевода денежных средств из финансовых организаций A_i , $i=1,2,3$ в финансовые организации B_j , $j=1,2,3,4$, а также запасы a_i и потребности b_j денежных средств финансовых организаций заданы таблицей:

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	4	2	5	5	40
A_2	13	16	18	6	100
A_3	14	23	12	7	90
b_j	190	10	70	80	

Переводы из A_1 в B_2 временно запрещены. Из A_2 в B_4 можно перевести не более 30 млн. руб. Составить оптимальный план перевода денежных средств.

Задание 2.

Для метода анализа иерархий задана таблица попарного сравнения критериев:

1.00	0.33	0.20	0.14
3.00	1.00	0.33	0.20
5.00	3.00	1.00	0.33
7.00	5.00	3.00	1.00

Определите второй по значимости критерий.

Примеры практико-ориентированных заданий

1. Найдите точку глобального экстремума функции $f(x, y) = (x-5)^2 + (y+3)^2$ методом наискорейшего спуска, если $(x^{(0)}, y^{(0)}) = (0, 0)$.

2. Решите методом штрафных функций задачу нелинейного программирования

$$f(x) = 8x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1 - x_2 \rightarrow \min, x_1 + x_2 = 2.$$

3. Решите симплекс-методом задачу ЛП

$$f(x) = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max, -x_1 + 2x_2 \leq 12, 2x_1 + x_2 \leq 16, 2x_1 - x_2 \leq 12$$

4. Для транспортной задачи найдите начальный опорный план методом минимального тарифа и проверьте его на оптимальность.

	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	9	10	8	4	450
A_2	8	7	5	3	550

A_3	8	2	3	4	400
b_j	200	300	400	500	

5. Решите методом Гомори задачу целочисленного программирования. Дайте геометрическую интерпретацию введения дополнительного ограничения.

$$f(x) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max, \quad x_1 + x_2 \leq 20, \quad -x_1 + x_2 \leq 7, \quad x \geq 0, \quad x \in \mathbb{Z}$$

6. Решите методом ветвей и границ задачу целочисленного программирования

$$f(x) = 5x_1 + 9x_2 \rightarrow \max, \quad x_1 + x_2 \leq 14, \quad -x_1 + x_2 \leq 3, \quad x \geq 0, \quad x \in \mathbb{Z}$$

Примерные вопросы для подготовки к экзамену

1. Постановка задачи безусловной оптимизации. Понятие локального и глобального экстремума. Сформулируйте необходимые и достаточные условия локального экстремума функции многих переменных без ограничений.
2. Существование глобального экстремума. Сформулируйте теорему Вейерштрасса и следствие из нее. Конструктивный способ исследования на глобальный экстремум в задаче безусловной оптимизации.
3. Сформулируйте необходимые условия первого и второго порядка для локального экстремума функции многих переменных с ограничениями типа равенств.
4. Сформулируйте достаточные условия локального экстремума ФМП с ограничениями типа равенств. Критерий Сильвестра.
5. Экономический смысл множителей Лагранжа. Привести формальные выкладки.
6. Постановка задачи математического программирования (ЗМП). Сформулируйте условия Куна-Таккера, если на переменные задачи наложено условие неотрицательности, и при отсутствии условия неотрицательности.
7. Определение седловой точки, ее свойства. Докажите основное соотношение между максимумом и минимумом.
8. Необходимые и достаточные условия существования седловой точки. Сформулируйте теорему о связи ЗМП с максиминной задачей функции Лагранжа.
9. Дайте определение двойственной задачи к ЗМП. Сформулируйте теорему о связи между существованием седловой точки у функции Лагранжи и решением ЗМП.

10. Определение выпуклой и вогнутой функции. Сформулируйте необходимые и достаточные условия выпуклости (вогнутости) функции.
11. Постановка задачи выпуклого программирования (ЗВП). Докажите, что множество допустимых планов ЗВП является выпуклым.
12. Постановка задачи выпуклого программирования. Докажите, что любой локальный максимум вогнутой функции $f(x)$ ЗВП на допустимом множестве является глобальным.
13. Сформулируйте теорему о существовании седловой точки у вогнуто-выпуклой функции. Какие условия данной теоремы выполняются для функции Лагранжа ЗВП, а какие не выполняются? Ответ обоснуйте.
14. Сформулируйте условие регулярности Слейтера для ЗВП и теорему о связи ЗВП с задачей нахождения седловой точки.
15. Опишите градиентный метод поиска локального экстремума функции многих переменных. Правила выбора шага. Условие Липшица. Сформулируйте условие сходимости метода с использованием константы Липшица.
16. Опишите метод наискорейшего подъема (или спуска) для решения задачи нахождения локального экстремума. Критерии остановки итерационного процесса.
17. Опишите метод проекции градиента для решения задачи нахождения локального экстремума. Запишите формулу для нахождения проекции точки на единичный шар, на неотрицательный ортант.
18. Опишите метод условного градиента для решения задачи нахождения локального экстремума. Выведите формулу итерационного процесса.
19. Опишите метод Ньютона для решения задачи нахождения локального экстремума. Выведите формулу итерационного процесса.
20. Опишите метод штрафных функций для решения задачи нахождения локального экстремума.
21. Опишите численный метод нахождения седловой точки функции Лагранжа.
22. Постановка задачи ЛП. Примеры линейных экономических задач. Три формы задачи ЛП.
23. Каноническая и стандартная форма задач линейного программирования. Приведение задачи ЛП, заданной в стандартной форме, к канонической форме. Приведение задачи ЛП, заданной в канонической форме, к стандартной форме.

24. Опишите графический метод решения задачи ЛП. Приведите примеры.
25. Изложите алгоритм решения задачи ЛП симплекс-методом.
26. Правило нахождения допустимого базиса в задаче ЛП. Изложите алгоритм метода искусственного базиса. Приведите пример.
27. Приведите пример взаимодвойственных задач ЛП. Сформулируйте правило построения двойственной задачи.
28. Теоремы двойственности для симметричных задач.
29. Постановка транспортной задачи. Закрытая и открытая модель транспортной задачи. Приведите примеры.
30. Методы построения начального опорного плана транспортной задачи (метод северо-западного угла, метод минимального тарифа, метод Фогеля). Приведите примеры и сравните общую стоимость перевозок для полученных опорных планов.
31. Опишите метод потенциалов решения транспортной задачи. Приведите пример.
32. Двойственный симплекс-метод (ДСМ). Псевдорешение. Условия применимости ДСМ.
33. Постановка задачи целочисленного программирования. Метод Гомори.
34. Постановка задачи целочисленного программирования. Метод ветвей и границ.
35. Динамическое программирование. Управления. Фазовые переменные. Уравнения состояний. Постановка задачи динамического программирования. Принцип оптимальности.
36. Дайте формальное описание метода динамического программирования. Уравнение Беллмана. Принцип оптимальности.
37. Постановка задачи многокритериальной оптимизации. Методы свертки критериев количественного и качественного типа.
38. Постановка задачи многокритериальной оптимизации. Доминирование и оптимальность по Парето и по Слейтеру. Приведите пример множества эффективных и полуэффективных векторов.
39. Постановка задачи многокритериальной оптимизации. Докажите теорему Гермейера.

40. Постановка задачи многокритериальной оптимизации. Сформулируйте теорему Карлина. Формализация двухкритериальной задачи нахождения оптимального портфеля ценных бумаг с использованием линейной свертки критериев.
41. Постановка задачи целевого программирования при использовании метрик ρ_2, ρ_1, ρ_0 . Опишите утопическое множество линейного типа.
42. Постановка задачи многокритериальной оптимизации. Опишите метод идеальной точки с использованием метрик ρ_2, ρ_1, ρ_0 . Постановка задачи многокритериальной оптимизации. Опишите метод приоритетов, метод ограничений, метод последовательных уступок.
43. Дайте понятие антагонистической игры, матричной игры. Верхняя и нижняя цена игры. Решение игры в чистых стратегиях. Смешанное расширение матричных игр. Теорема фон Неймана.
44. Необходимые и достаточные условия оптимальности стратегий в матричных играх.
45. Теорема о свойствах оптимальных стратегий. Графический метод решения матричной игры.
46. Принцип доминирования в матричных играх.
47. Связь матричных игр с ЛП.
48. Опишите модель игры с природой. Критерии оптимальности.
49. Дайте понятие бескоалиционной игры, биматричной игры. Равновесие по Нэшу.

Пример экзаменационного билета

1. Сделать одну итерацию по методу наискорейшего спуска для функции $f(x) = (x_1 - 4)^2 + (0.5x_2 + 2)^2$, начиная итерационный процесс с точки $x^{(0)} = (0, 0)$. Достигнута ли точность по критерию $|x^{(k+1)} - x^{(k)}| \leq \varepsilon$ для $\varepsilon = 0.5$? (15 баллов)
2. Найдите множество оптимальных по Парето стратегий двухкритериальной задачи. Решите задачу методом идеальной точки, используя евклидову метрику, (15 баллов)

$$f_1(x) = 5x_1 + 6x_2 \rightarrow \max, f_2(x) = 4x_1 + 2x_2 \rightarrow \max, x_1 + x_2 \leq 20,$$

3. Необходимо распределить средства в размере $s_0 = 1000$ в течение 3 лет между двумя предприятиями. Средства x , выделяемые первому предприятию, приносят в конце года доход $f_1(x) = 5x$ и возвращаются в размере $\phi_1(x) = 0,3x$. Средства y , вложенные во второе предприятие, соответственно, приносят доход $f_2(y) = 6y$ и возвращаются в размере $\phi_2(y) = 0,4y$. В первый год выделенные средства распределяются полностью, а

в следующие годы полностью распределяются возвращенные средства за предыдущий год. Доход в производство не поступает. Сколько средств нужно выделять каждому предприятию в начале года, чтобы суммарный доход был максимальный за все 3 года. В ответе укажите средства, выделяемые каждому предприятию в виде таблицы и значение максимального дохода. (15 баллов)

4. Определение седловой точки, ее свойства. Докажите основное соотношение между максимином и минимаксом. (15 баллов)

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

Основная литература:

1. Гончаренко, В.М. Методы оптимальных решений в экономике и финансах : Учебное пособие / В.М. Гончаренко, В.Ю. Попов, Д.С. Набатова [и др.]; под. ред. В.М. Гончаренко, В.Ю. Попов Электрон. дан. Москва : КноРус, 2025 400 с. Режим доступа: book.ru Internet access <https://book.ru/book/955840> ISBN 978-5-406-13887-8. [БИК ID: RU\bookru\bibl\955840]

Дополнительная литература:

1. Аттетков, Александр Владимирович Методы оптимизации : Учебное пособие / Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана 1 Москва : Издательский Центр РИОР, 2023 270 с. (Высшее образование: Бакалавриат) ВО - Бакалавриат <https://znanium.com/catalog/document?id=422330> ISBN 978-5-369-01037-2 ISBN 978-5-16-110508-5 (электр. издание) ISBN 978-5-16-004876-5 (ISBN соиздателя) . [БИК ID: RU\infra-m\znanium\bibl\1930702]
2. Золотова, Т.В. Методы принятия управленческих решений : Учебник / Т.В. Золотова Электрон. дан. Москва : КноРус, 2021 344 с. Режим доступа: book.ru Internet access <https://book.ru/book/938053> ISBN 978-5-406-06706-2. [БИК ID: RU\bookru\bibl\938053]

9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

1. Информационно-образовательный портал Финуниверситета: <https://org.fa.ru>
2. •Электронная библиотека Финансового университета (ЭБ) <http://elib.fa.ru/>
3. •Электронно-библиотечная система BOOK.RU <http://www.book.ru>
4. •Электронно-библиотечная система Znanium <http://www.znanium.ru/>
5. •Электронно-библиотечная система издательства «ЮРАЙТ» <https://urait.ru/>
6. •Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека ОНЛАЙН» <http://biblioclub.ru/>
7. •Научная электронная библиотека eLibrary.ru <http://elibrary.ru>
8. •Национальная электронная библиотека <http://нэб.рф/>

9. •Электронно-библиотечная система издательства Лань <https://e.lanbook.com/>
10. •Деловая онлайн-библиотека Alpina Digital <http://lib.alpinadigital.ru/>

10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Студентам при подготовке следует использовать нормативные документы Финансового университета, Методические рекомендации по планированию и организации внеаудиторной самостоятельной работы студентов по образовательным программам бакалавриата и магистратуры в Финансовом университете, утвержденные приказом Финуниверситета от 11.05.2021 г. № 1040 (см. сайт Финансового Университета: на главной странице раздел «Наш университет»; далее «Единая правовая база Финуниверситета»).

11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем

Комплект лицензионного программного обеспечения:

1. Kaspersky
2. Microsoft Office (Windows)
3. Astra Linux
4. Libre Office
5. Windows

Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

1. Информационно-правовая система «Гарант»
2. Информационно-правовая система «Консультант Плюс»
3. Электронная энциклопедия: <http://ru.wikipedia.org/wiki/Wiki>
4. Система комплексного раскрытия информации «СКРИН» - <http://www.skrin.ru/>

Сертифицированные программные и аппаратные средства защиты информации:

1. не предусмотрены

12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине

1. **Учебная аудитория** для проведения учебных занятий, предусмотренных программой, в том числе групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, оснащенная оборудованием и техническими средствами обучения: мебель аудиторная (столы, стулья, доска аудиторная), набор демонстрационного оборудования (проектор, экран)

2. Библиотека, читальный зал